ON
OBSERVATÓRIO NACIONAL

A Teoria da Gravitação de Einstein

A despeito do grande sucesso da teoria da relatividade restrita apresentada por Einstein em 1905 existiam alguns questões básica que não eram respondidas por essa teoria. Por exemplo, a teoria da relatividade restrita nos diz que "as leis da natureza são as mesmas em todos os sistemas de referência inerciais".

Einstein notou imediatamente a fraqueza da teoria da relatividade restrita e propôs em 1916 a teoria da relatividade geral que generaliza o princípio da relatividade estabelecendo que "as leis da natureza são as mesmas em dois referencial que se movem de qualquer maneira possível um em relação ao outro".

A teoria da gravitação proposta por Albert Einstein e David Hilbert ficou sendo mais conhecida como Teoria da Relatividade Geral (TRG), como Teoria Relativística da Gravitação (TRG) ou como Teoria da Gravitação de Einstein (TGE). Usaremos todos esses termos de modo indiscriminado embora considere "teoria da gravitação" ser bem mais representativo sobre o que a teoria descreve.

A Teoria da Gravitação de Einstein descreve os fenômenos de interação gravitacional entre quaisquer corpos existentes no universo.

Para Einstein a gravidade não é uma força, no sentido tradicional qua damos a este termo na física. Segundo ele

- a gravidade é uma manifestação da curvatura do espaço-tempo.
- a curvatura do espaço-tempo é produzida pela massa-energia contida nele

Isso pode ser representado esquematicamente pela relação abaixo, que ocorre em ambos os sentidos

matéria ou energia <=> efeito gravitacional <=> espaço-tempo curvo

Esta relação entre energia-momentum e a curvatura do espaço-tempo é governada por um conjunto de equações que são as famosas "equações de campo de Einstein".

Na verdade, o estudo das interações gravitacionais deveria ser chamado de Geometrodinâmica. Esse nome foi proposto pelo físico norte-americano John Archibald Wheeler tendo em vista que a teoria da relatividade geral geometriza a gravitação.

O espaço-tempo da relatividade geral

A Teoria da Gravitação Universal proposta por Isaac Newton utiliza os conceitos de espaço e tempo. Isso foi mudado com o advento da Teoria da Relatividade Restrita, proposta por Einstein em 1905. Nessa época foi introduzido o conceito de espaço-tempo como uma única entidade, ao contrário do espaço e tempo separados da física Newtoniana. Isso foi proposto pelo físico alemão Hermann Minkowski ao realizar estudos sobre a teoria da relatividade restrita. No entanto, o conceito de espaço-tempo definido na Teoria da Relatividade Especial não pode ser simplesmente transferido para a relatividade geral.

Na teoria relativística da gravitação o espaço-tempo possui características não usuais. Por exemplo, ele é:

- curvo:
  dizemos que o espaço-tempo da relatividade geral tem uma geometria não-euclidiana. Na relatividade restrita o espaço-tempo é plano.

- Lorentziano:
  as métricas do espaço-tempo devem ter uma assinatura métrica mista. Isto é herdado da relatividade especial.

- quadri-dimensional:
  isso é necessário para poder cobrir as três dimensões espaciais e o tempo. Isto também é herdado da relatividade especial.

Os princípios fundamentais da Teoria da Gravitação de Einstein

A Teoria da Gravitação de Einstein está baseada em um conjunto de princípios fundamentais que guiaram o seu desenvolvimento. Esses princípios foram sendo criados ao longo do desenvolvimento da própria teoria.

- princípio geral da relatividade:
  as leis da física devem ser as mesmas para todos os observadores, estejam eles acelerados ou não

- princípio da covariância geral:
  as leis da física devem ter a mesma forma em todos os sistemas de coordenadas

- o movimento inercial é movimento geodésico:
  as linhas de universo de partículas não afetadas por forças físicas são geodésicas tipo-tempo ou nulas do espaço-tempo

- princípio da invariância de Lorentz local:
  as leis da relatividade especial se aplicam localmente para todos os observadores inerciais

- o espaço-tempo é curvo:
  isso permite que os efeitos gravitacionais, como por exemplo a queda livre, sejam descritos como uma forma de movimento inercial

- a curvatura do espaço-tempo é criada pelo momento-energia contido no espaço-tempo:
  isso é descrito na teoria relativística da gravitação pelas "equações de campo de Einstein"

Todos os termos acima citados serão explicados ao longo do texto.

As equações de campo de Einstein: o trabalho do físico relativista

A Teoria da Gravitação de Einstein não somente nos diz que o espaço-tempo é curvo mas também especifica *quanto* é a sua curvatura. Mais especificamente, ela nos dá um conjunto de equações que relacionam a curvatura do espaço-tempo com a distribuição de energia-matéria no espaço.

As equações propostas por Einstein são chamadas de "equações de campo" porque elas descrevem o comportamento e as propriedades do campo gravitacional. Elas têm a forma:

$$G_{\mu\nu} = - k\, T_{\mu\nu}$$

onde *k* é dado por

$$k = 8\, \pi\, G/ c^4$$

Nesta última expressão G é a constante gravitacional.

Vamos explicar melhor o que essa equação nos diz. O lado esquerdo dela, $G_{\mu\nu}$, é o chamado "tensor de

Einstein". Ele depende das funções $g_{\mu\nu}$ e de suas primeiras e segundas derivadas. Essa parte da equação de campo de Einstein está associada com a estrutura geométrica do espaço-tempo.

O lado direito da equação de campo de Einstein apresenta o "tensor energia-momentum" $T_{\mu\nu}$. Ele depende da distribuição de energia e matéria no universo.

Veja então que a equação de campo de Einstein nos diz que a curvatura do espaço-tempo (lado esquerdo) é produzida pela distribuição de massa-energia no espaço-tempo (lado direito).

curvatura do espaço-tempo ($\mathbf{G_{\mu\nu}}$) = conteúdo de matéria-energia do espaço ($\mathbf{T_{\mu\nu}}$)

Poderíamos escrever as equações de campo de Einstein de modo mais detalhado. O tensor de Einstein, $G_{\mu\nu}$, na verdade é dado por

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - 1/2\ g_{\mu\nu} R$$

Deste modo as equações do campo gravitacional são dadas por:

$$R_{\mu\nu} - 1/2\ g_{\mu\nu} R = -\,k\, T_{\mu\nu}$$

ou então

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R\ g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

O termo R é chamado de escalar de curvatura e o termo $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci. Na verdade esse dois tensores são calculados a partir de um tensor bem mais geral, $R^{\lambda}{}_{\alpha\nu\mu}$, chamado tensor de curvatura ou tensor de Riemann-Christoffel. Sua expressão é bastante complicada e envolve os chamados símbolos de Christoffel. Os matemáticos provaram que o tensor mais simples que pode ser construido a partir das componentes do tensor métrico e de suas primeiras e segundas derivadas é um tensor de ordem 4, ou seja, com quatro índices. Por esta razão o tensor de curvatura da teoria da gravitação de Einstein é dado por $R^{\lambda}{}_{\alpha\nu\mu}$.

Em resumo, dada uma métrica *ds*^{2} que descreve um determinado espaço-tempo, o físico relativísta calcula:

- todos os potenciais gravitacionais $g_{\mu\nu}$ diferentes de zero.

- com o auxílio dos potenciais gravitacionais temos que calcular os símbolos de Christoffel

  $$\left\{ {\alpha \atop \beta\ \gamma} \right\}$$

  por meio da expressão

$$\left\{ {\alpha \atop \beta\gamma} \right\} = \frac{1}{2} g^{\alpha\eta} \left(g_{\beta\eta|\gamma} + g_{\gamma\eta|\beta} - g_{\beta\gamma|\eta} \right)$$

$$\text{onde} \quad g_{\beta\eta|\gamma} = \frac{\partial g_{\beta\eta}}{\partial x^{\gamma}}$$

- em posse de todos os símbolos de Christoffel já podemos calcular o tensor de curvatura $R^{\lambda}{}_{\alpha\nu\mu}$. Ele é dado por

$$R^{\alpha}{}_{\eta\beta\gamma} = \left\{ {\alpha \atop \beta\eta} \right\}_{|\gamma} - \left\{ {\alpha \atop \eta\gamma} \right\}_{|\beta} + \left\{ {\alpha \atop \tau\gamma} \right\} \left\{ {\tau \atop \beta\eta} \right\} - \left\{ {\alpha \atop \tau\beta} \right\} \left\{ {\tau \atop \gamma\eta} \right\}$$

Como estamos trabalhando em um espaço-tempo quadri-dimensional, cada um dos índices desses tensores varia de 0 a 3. Isso faz com que tenhamos um conjunto de 256 componentes do tensor de Riemann-Christoffel para calcular. Felizmente este tensor possui simetrias que reduzem bastante esse número. No final, após utilizarmos os recursos dessas simetrias, ficamos com apenas 20 componentes independentes para calcular.

- conhecendo as componentes do tensor de Riemann-Christoffel, é fácil calcular o Tensor de Ricci, $R_{\alpha\mu} = R^{\lambda}{}_{\alpha\lambda\mu}$. Esse tensor é dado por

$$R_{\beta\delta} = \left\{ {\alpha \atop \beta\delta} \right\}_{|\delta} - \left\{ {\alpha \atop \beta\delta} \right\}_{|\alpha} + \left\{ {\alpha \atop \tau\delta} \right\} \left\{ {\tau \atop \beta\alpha} \right\} - \left\{ {\alpha \atop \tau\alpha} \right\} \left\{ {\tau \atop \beta\delta} \right\}$$

- depois disso só falta calcular o escala de curvatura $R = R_{\alpha\mu}\, g^{\alpha\mu}$

Agora é só substituir esses termos organizadamente montando o sistemas de equações de campo de Einstein. Bastante difícil não acha? Brincadeira! Antigamente você tinha que fazer isso na ponta do lápis e um pequeno erro no início dos cálculos se propagava em cascata uma vez que todos os termos seguintes, por estarem vínculados pelo cálculo, possivelmente também estavam errados. Era apagar e começar tudo de novo. Hoje existem programas de computador que fazem todos esses cálculos em apenas alguns segundos. Moleza!

Tudo isso dito acima é apenas a preparação para o verdadeiro trabalho do pesquisador que começa após terem sido montadas as equações de campo.

Ocorre que essas equações são equações diferenciais parciais de segunda ordem não lineares eliptica-hiperbólica acopladas e isso pode ser traduzido como "são muito difíceis de resolver"! Mesmo assim o trabalho tem que ser feito e o físico relativista se debruça sobre elas procurando alcançar o seu objetivo final que é resolver este sistema de equações diferenciais para uma métrica dada que descreve um determinado espaço-tempo.

As equações de campo de Einstein e o princípio de Mach

As equações de campo de Einstein constituem uma aplicação especial do chamado "princípio de Mach". De acordo com esse princípio as propriedades inerciais da matéria são produzidas pela distribuição da matéria existente no resto do Universo.


Ernst Mach (1838-1916)

Ernst Mach (1838-1916) foi um filósofo e cientista austríaco do século XIX que, em 1893, postulou esse princípio.

A observação básica feita por Ernst Mach era que a velocidade e a aceleração de uma partícula não teria significado se a partícula estivesse sozinha no Universo. Somente podemos falar de acelerações em relação a outros corpos do mesmo modo que falamos de velocidades em relação a outros corpos. O conceito de velocidade relativa conduziu à relatividade restrita. O conceito de aceleração relativa é o importante ingrediente do princípio de Mach que levou Einstein a desenvolver sua teoria geral da relatividade.

Vamos tomar como exemplo a rotação da Terra em torno do seu eixo. A Terra gira, não em relação a qualquer espaço absoluto, mas em relação às estrelas distantes no Universo. Se a Terra fosse completamente coberta por nuvens espessas ainda seríamos capazes de descobrir sua rotação usando o pêndulo de Foucault. Um pêndulo no pólo norte da Terra gira seu plano gradualmente, em relação à Terra, uma vez que seu plano é mantido fixo em relação às estrelas distantes. Se nenhuma outra estrela existisse no Universo, além da Terra, de acordo com o princípio de Mach o plano do pêndulo permaneceria constante em relação à Terra. Por conseguinte de algum modo a matéria distante no Universo tem consequências que dizem respeito ao comportamento da matéria em torno de nós. Einstein tentou incorporar este princípio em sua teoria da relatividade geral.

O princípio de Mach e sua implicação de que a inércia não é uma propriedade intrínseca da matéria mas é devida ao fundo de estrelas distantes tem recebido uma recepção mista no mundo da física teórica. Alguns físicos tomaram as idéias com certas restrições argumentando que elas estão todas baseadas em uma coincidência de observações. Outros físicos, incluindo Einstein, ficaram impressionados pelo princípio de Mach e tentaram incorporá-lo no resto da física.

Einstein tinha esperança que sua teoria da relatividade geral incorporasse o princípio de Mach. Estabelecendo uma íntima conexão entre a geometria do espaço-tempo e as propriedades físicas da matéria e energia, Einstein obteve o que pareceu ser um passo preliminar na direção dos conceitos Machianos. Entretanto, investigações posteriores provaram o contrário.

Uma explicita demonstração de que a relatividade geral não incorpora o princípio de Mach foi mostrada pelo físico alemão Kurt Gödel em 1949. A partir das equações de Einstein ele contruiu um modelo do Universo no qual o referencial inercial local não era o mesmo que o referencial da matéria distante que não está em rotação. O modelo de Gödel de um Universo em rotação obtido a partir das equações de Einstein mostram que o princípio de Mach não está inteiramente incorporado na teoria da relatividade geral.

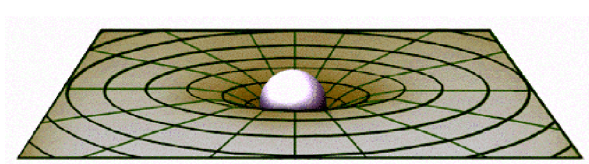
As soluções das equações de campo de Einstein

Se o tensor energia-matéria $T_{\mu\nu}$ das equações de campo de Einstein é igual a zero em todos os lugares ou seja, se não há matéria no universo, estas equações são escritas como

$$G_{\mu\nu} = 0$$

Uma das possíveis soluções desta equação é o espaço-tempo "plano" de Minkowski. Isso não é surpresa pois se é a matéria que provoca a curvatura do espaço-tempo e no caso considerado não existe matéria a curvatura só pode ser zero. Isto obriga que o tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$ que está no lado esquerdo das equações de campo seja nulo.

Uma outra solução relativamente simples das equações de campo de Einstein é aquela que diz respeito a um corpo esférico em um espaço vazio. Se considerarmos o Sol como um corpo esférico e supormos que o espaço é vazio em torno dele as equações de campo de Einstein nos dão a curvatura do espaço-tempo naquele local.



O tensor métrico em volta do Sol é chamado de "métrica de Schwarzschild", resultado obtido em 1916, e corresponde a um elemento de linha que em coordenadas esféricas é

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - \frac{2Gm}{c^2 r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2Gm}{c^2 r}\right)} + r^2 \left(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta \, d\phi^2\right)$$

Esta "métrica de Schwarzschild" ou "elemento de linha de Schwarzschild" é que nos trouxe o conceito de buraco negro. O termo $1 - 2GM/c^2r$ tem um comportamento estranho quando $2GM/c^2 = r$ pois, neste caso, ele é igual a zero. Como este termo está no denominador de uma fração ficamos com 1 dividido por zero que sabemos tender para infinito. Vemos então que há um limite em $2GM/c^2 = r$. Esse limite é o chamado "raio de Schwzarzschild" e marca o chamado de "horizonte de eventos" de um buraco negro.

$$r_s = \frac{2Gm}{c^2}$$