ON
OBSERVATÓRIO NACIONAL

Quem tem medo de matemática?

Ninguém, é claro! Matemática não morde, não mata, não é corrupta, então porque ter medo de algo que não pode nos machucar ou ofender? É claro que existem pessoas que possuem uma aptidão maior para esse assunto, assim como outros têm aptidão para a medicina ou botânica. Entretanto, isso não quer dizer que uma pessoa, mesmo sem aptidão ou vontade de se tornar um profissional de matemática, não possa cada vez aprender um pouquinho mais sobre essa ciência.

Irei provar nesse capítulo que qualquer pessoa, mesmo aquelas que têm fobia de matemática, são capazes de aceitar novos conceitos e se surpreender com o que a matemática tem para oferecer. Para aqueles que gostam de matemática esse capítulo irá mostrar o magnífico campo de estudo que você tem à sua frente. Aquele que não gosta de matemática terminará esse capítulo surpreso com o que aprendeu.

Estruturas básicas da matemática

Vamos apresentar a vocês algumas das estruturas matemáticas que são utilizadas no estudo das teorias da relatividade restrita e geral. Possivelmente muitos leitores jamais ouviram falar delas. No entanto, essas partes da matemática são comumente usadas tanto na definição de propriedades do espaço-tempo como no cálculo feito pelos profissionais que trabalham nessa área.

Quero ressaltar que aqui daremos apenas algumas definições e não aprofundaremos nenhum desses assuntos. Cada um deles é motivo de longos estudos e certamente o nosso curso de ensino a distância não é o local para desenvolvermos essas teorias. Entretanto, acredite, é extremamente gostoso estudar esses temas!

Conjunto

Um dos conceitos mais elementares que a matemática possui é o de conjunto. Um punhado de coisas com uma propriedade comum pode ser definido como um conjunto. Você usa esse conceito na sua vida diária: um conjunto de roupas, de copos, de garrafas, de inimigos, etc. A língua portuguesa, por exemplo, atribui nomes diferentes aos conjuntos de certos animais ou objetos: uma alcatéia de lobos, uma manada de elefantes, etc, que chamamos de "coletivos".

Na matemática, por ser uma ciência abstrata, não estamos preocupados em definir conjuntos de objetos e por isso quase sempre nos referimos a conjuntos de números: o conjunto dos números inteiros, o conjunto dos números pares, o conjunto dos números fracionários, etc.

Cada objeto ou número que pertence a um determinado conjunto recebe o nome de elemento do conjunto. Assim, um camelo é um elemento do conjunto cáfila (coletivo de camelos), o número 5 é um elemento do conjunto dos números ímpares, etc. Um conjunto que não possui elementos é chamado de conjunto vazio e é representado pelo símbolo $\emptyset$.

Sempre que escrevemos um conjunto colocamos seus elementos entre "chaves". Assim podemos representar o conjunto dos números inteiros que vão de 15 a 20 como:

$$I = \{15, 16, 17, 18, 19, 20\}$$

Alguns importantes conjuntos da matemática são:

- o conjunto dos **números naturais**: N = {1,2,3,4,5,....}. Lembre-se que 0 não pertence aos números naturais.

- o conjunto dos **números inteiros**: Z = {..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...}. Note que esse conjunto inclui todos os números inteiros sejam eles positivos ou negativos. Ele também inclui o zero.

- o conjunto dos **números racionais**, Q, que são todos os números, positivos ou negativos, que podem ser escritos na forma m/n, onde m pertence aos números inteiros e n pertence aos números naturais.

- o conjunto dos **números reais**, R. Esse conjunto pode ser representado geometricamente por uma linha e cada ponto dela representa um elemento desse conjunto.

Existem algumas outras propriedades importantes dos conjuntos. Algumas delas são:

- **subconjunto**
  Um conjunto A é um **subconjunto** de um conjunto B se e somente se cada elemento em A também pertence a B.

- **união**
  A **união** de dois conjuntos A e B é o conjunto de todos os elementos que pertencem **ou** a A **ou** a B

- **interseção**
  A **interseção** de dois conjuntos A e B é o conjunto de elementos que pertencem **tanto** a A **como** a B

Grupo

Se você define uma operação sobre um determinado conjunto, adicionando algumas outras poucas regras, obterá o que os matemáticos chamam de **grupo**. Assim, grupo é definido como, dado um conjunto A de elementos quaisquer {a,b,c,d,e,f,...} e uma operação qualquer chamada multiplicação de grupo, que designamos por um ponto ($\bullet$), e que pode ser realizada sobre os elementos desse conjunto teremos um grupo se:

- a operação realizada sobre dois elementos do conjunto dá como resultado um outro elemento do conjunto isto é, se g_i pertence a G e g_j também pertence a G temos que $g_i \bullet g_j$ pertence a G.

- existe um elemento tal que realizando a operação ($\bullet$) entre ele e qualquer elemento do conjunto teremos como resultado o mesmo elemento. Dizemos que isso é a operação de identidade. Em termos matemáticos se g_1 pertence a G e $g_1 \bullet g_i = g_i = g_i \bullet g_1$ para todo g_i então o elemento g_1 é o **elemento identidade**

- cada elemento do conjunto possui um elemento que chamamos de inverso de tal modo que o produto dos dois dá o elemento identidade. Se $g_k \bullet g_l = g_l \bullet g_k = g_1$ então $g_l = g_k^{-1}$ e g_k é o elemento inverso de g_l

- a ordem segundo a qual fazemos a operação definida acima entre vários elementos do conjunto não é importante. Deste modo $g_i \bullet (g_j \bullet g_k) = (g_i \bullet g_j) \bullet g_k$

Se, além disso tudo, a operação ($\bullet$) entre dois elementos do conjunto pode ser invertida sem ter o resultado alterado dizemos que ela é comutativa. Neste caso o grupo é chamado de grupo comutativo ou grupo Abeliano.

Qual a importância da teoria de grupos para o estudo da gravitação? Como teoria matemática, a teoria de grupos está presente em toda a física moderna. Por exemplo, as transformações de Lorentz formam um grupo.

O conceito de grupo é uma das estruturas algébricas mais importantes no estudo da física moderna.

Campo

Um campo F é um conjunto de elementos f_o, f_1, f_2, f_3,... sobre os quais definimos duas operações, uma

adição (+) e uma multiplicação escalar ($\bullet$), de tal modo que

- F é um grupo abeliano sob a operação (+) com f_o sendo o elemento identidade.
- $f_i \bullet f_j$ pertence a F.
- $f_i \bullet (f_j \bullet f_k) = (f_i \bullet f_j) \bullet f_k$
- $f_i \bullet 1 = 1 \bullet f_i = f_i$.
- $f_i \bullet f_i^{-1} = 1 = f_i^{-1} \bullet f_i$ para f_i diferente de f_o.
- $f_i \bullet (f_j + f_k) = f_i \bullet f_j + f_i \bullet f_k$

  $(f_i + f_j) \bullet f_k = f_i \bullet f_k + f_j \bullet f_k$

Se, além dessas propriedades $f_i \bullet f_j = f_j \bullet f_i$ dizemos que o campo é comutativo.

Espaço Vetorial Linear

Os espaços vetoriais lineares V consistem de

- uma coleção de elementos v_o, v_1, v_2, v_3,... pertencentes a V e chamados de vetores.
- uma coleção f_1, f_2, f_3,... pertencentes a F ou seja, um campo (com as propriedades definidas no item anterior)

junto com dois tipos de operações

- adição vetorial (+)
- multiplicação escalar ($\bullet$)

tal que as seguintes propriedades ocorrem

- o conjunto V com a operação (+) é um grupo abeliano.
- se v_i e v_j pertencem a V então $v_i + v_j$ também pertence a V.
- $\mathbf{v_i} + (\mathbf{v_j} + \mathbf{v_k}) = (\mathbf{v_i} + \mathbf{v_j}) + \mathbf{v_k}$.
- $\mathbf{v_o} + \mathbf{v_i} = \mathbf{v_i} = \mathbf{v_i} + \mathbf{v_o}$.
- $\mathbf{v_i} + (-\mathbf{v_i}) = \mathbf{v_o} = (-\mathbf{v_i}) + \mathbf{v_i}$
- $\mathbf{v_i} + \mathbf{v_j} = \mathbf{v_j} + \mathbf{v_i}$
- f_i F, $\mathbf{v_j}$ V $f_i\mathbf{v_j}$ V
- $f_i.(f_j \,.\, \mathbf{v_k}) = (f_i \,.\, f_j) \,.\, \mathbf{v_k}$
- $1 \bullet \mathbf{v_i} = \mathbf{v_i} = \mathbf{v_i} \bullet 1$
- $f_i \bullet \mathbf{v_k} + \mathbf{v_l}) = f_i \bullet \mathbf{v_k} + f_i \bullet \mathbf{v}$

  $(f_i + f_j) \bullet \mathbf{v_k} = f_i \bullet \mathbf{v_k} + f_j \bullet \mathbf{v_k}$

Álgebra

Uma álgebra linear A consiste de

- uma coleção v_o, v_1, v_2, v_3,... pertencente a V, chamados de vetores.
- uma coleção f_1, f_2, f_3,... pertencente a F ou seja, um campo

junto com três tipos de operações

- adição vetorial (+)
- multiplicação escalar ($\bullet$)
- multiplicação vetorial (X)

tal que as seguintes propriedades ocorrem

- todas as propriedades de espaço vetorial são obedecidas e
- v_1, v_2 pertencem a V então v_1 X v_2 também pertence a V
- $(\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}) \text{ X } \mathbf{v_3} = \mathbf{v_1} \text{ X } \mathbf{v_3} + \mathbf{v_2} \text{ X } \mathbf{v_3}$
- $\mathbf{v_1} \text{ X } (\mathbf{v_2} + \mathbf{v_3}) = \mathbf{v_1} \text{ X } \mathbf{v_2} + \mathbf{v_1} \text{ X } \mathbf{v_3}$

Diferentes variedades de álgebras podem ser obtidas dependendo de quais postulados adicionais são também satisfeitos

- $(\mathbf{v_1} \times \mathbf{v_2}) \times \mathbf{v_3} = \mathbf{v_1} \times (\mathbf{v_2} \times \mathbf{v_3})$
- $\mathbf{v_1} \times \mathbf{1} = \mathbf{v_1}$
- $\mathbf{v_1} \times \mathbf{v_2} = \pm\, \mathbf{v_2} \times \mathbf{v_1}$
- $\mathbf{v_1} \times (\mathbf{v_2} \times \mathbf{v_3}) = (\mathbf{v_1} \times \mathbf{v_2}) \times \mathbf{v_3} + \mathbf{v_2} \times (\mathbf{v_1} \times \mathbf{v_3})$

Resumindo...

Pelas definições mostradas acima vemos que as estruturas algébricas tem sua complexidade aumentada à medida que vamos de conjuntos para álgebras. A estrutura seria como abaixo:

conjunto → grupo → campo → espaço vetorial → álgebra

Topologia

A topologia é o ramo da matemática que se preocupa com o estudo da continuidade. O estudioso de topologia dá ênfase às propriedades de formas que permanecem inalteradas não importa quanto essas formas estão sendo torcidas ou manipuladas de qualquer outra maneira.

Tais transformações de objetos idealmente elásticos estão sujeitas somente à condição de que, para superfícies, pontos vizinhos permaneçam próximos no processo de transformação. Essa condição efetivamente proibe transformações que envolvam corte e colagem. Por exemplo, uma rosquinha e uma xicara de café são topologicamente equivalentes. Uma delas pode ser continuamente transformada na outra e vice-versa. O buraco central que caracteriza a rosquinha será preservado como o buraco que existe na alça da xícara de café.

Veja que para a topologia um disco com um buraco no centro é topologicamente diferente de um círculo ou um quadrado porque não podemos criar ou destruir buracos por deformações contínuas. Deste modo, usando métodos topológicos não esperamos ser capazes de identificar uma figura geométrica como sendo um triângulo ou um quadrado. Entretanto, esperamos ser capazes de de detctar a presença de aspectos "grosseiros" tais como buracos ou o fato de que a figura é formada por dois pedaços adjacentes.

Para definirmos topologia é preciso antes conhecer alguns conceitos matemáticos. Sabemos que a semi-reta é formada por um conjunto de pontos. Na verdade esses pontos são os números reais e, por esse motivo, os matemáticos definem a semi-reta pelo símbolo R^1. O número 1 está indicando que a semi-reta possui uma única dimensão. E o plano? Se deslocarmos uma semi-reta, desde que não seja ao longo de sua direção, formaremos um semi-plano. Os pontos nesse semi-plano são identificados por conjuntos de pares de pontos, do tipo (x,y) onde x e y são números reais. Ao semi-plano os matemáticos dão o nome de R^2 por ser definido em duas dimensões. Como já vimos, a matemática não está preocupada com objetos e sim com números. Além disso a matemática não permanece limitada pelo número de dimensões que nos percebemos ou seja, 3 dimensões. A matemática sempre procura tornar os seus resultados os mais gerais possíveis e, portanto, procura estudar espaços com dimensão qualquer. A esses espaços que se caracterizam por possui um número qualquer de dimensões os matemáticos dão o nome de espaço n-dimensionais e os chamam de R^n. Note que, num espaço n-dimensional cada ponto será representado por conjuntos de n números reais, algo como $(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots x_n)$.

Um outro conceito importante que precisamos conhecer é o de conjunto aberto. Se considerarmos uma semi-reta podemos definir um intervalo aberto (a,b) como sendo o conjunto de todos os pontos x (na verdade, números reais) tais que $a < x < b$. Veja que os pontos extremos não são considerados e por esse motivo o intervalo é chamado de "aberto". Um conjunto aberto é definido como sendo qualquer união de intervalos abertos. Qaulquer região de um espaço limitada por uma curva fechada, mas excluindo pontos situados sobre essa curva, é um conjunto aberto. A união de conjuntos abertos também é um conjunto aberto. O conjunto vazio, ou seja aquele que não possui elementos, é definido como sendo um conjunto aberto.

Objetos com buracos podem ser classificados topologicamente como:

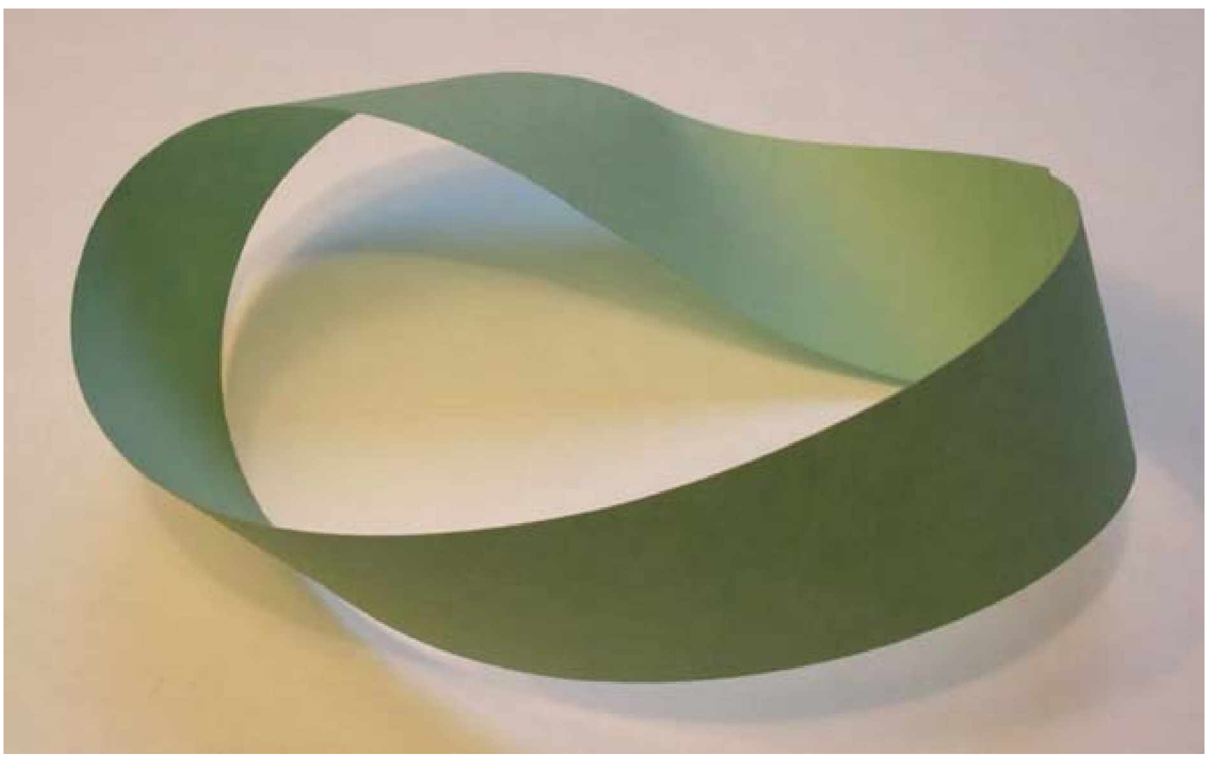
sem buraco	genus 0
um buraco	genus 1
dois buraco	genus 2
três buraco	genus 3


August Ferdinand Möbius (1790 - 1868)

Algumas vezes certos objetos podem ter o mesmo tipo de genus mas têm uma torção que os faz topologicamente diferente. Considere a forma de rosquinha mostrada acima e a faixa de Moebius, genus 1, mostrada abaixo.

As propriedades da faixa de Möbius foram descobertas independentemente e quase simultaneamente, em 1858, por dois matemáticos alemães, August Ferdinand Moebius e Johann Benedict Listing (curiosamente, o pai de Möbius era professor de dança e sua mãe descendente de Martinho Lutero!).

A primeira vista poderíamos ser levados a considerar que topologicamente essas duas geometrias fossem iguais: ambas são superfícies que envolvem um buraco central. No entanto, devido à torção existente na faixa de Möbius elas são topologicamente diferentes. Note que torção existente na faixa de Moebius permite que um objeto qualquer se desloque continuamente ao longo de ambos os lados da faixa.



Quando essa idéia de torção é considerada em três dimensões com a faixa de Moebius se tornando um objeto, o objeto torcido é chamado de **garrafa de Klein**. Essa topologia foi descoberta pelo matemático e astrônomo alemão Felix Christian Klein. Essa garrafa é mostrada abaixo em uma animação que mostra como você tem que que torcer as coisas para obter o objeto.

Felix Christian Klein (1849 - 1925)

Qual é o significado cosmológico da topologia? A parte do universo que podemos ver não tem mais do que 15 bilhões de anos-luz de raio. Essa parte observável do universo não mostra sinais de ter uma topologia estranha. Entretanto podemos não ser capazes de ver as partes cruciais do universo que poderiam conduzir a interessantes observações topológicas.

O diagrama abaixo dá uma ilustração de como poderia ser uma observação de topologia cosmológica. Ele mostra como o espaço pode ser "enrolado" em uma forma cilíndrica. Quando o espaço plano que contém as galáxias é "enrolado" em uma forma cilíndrica e então mais uma vez na forma de um toróide (rosquinha) as galáxias têm mais de uma maneira de "ver" uma às outras. No final a luz proveniente de uma galáxia alcança a outra tanto pelo caminho curto como pelo caminho longo.

Mais de uma maneira de "ver" se traduz na situação onde observadores nas galáxias observam múltiplas cópias de cada uma das outras. Essa é uma previsão cosmológica baseada em considerações de topologia.

Podemos então definir **topologia** da seguinte forma: seja X um conjunto não vazio. Uma classe T de subconjuntos de X é uma **topologia** em X se e somente se T satisfaz os seguintes critérios:

- X e o conjunto vazio $\emptyset$ pertencem a T
- a união de qualquer número de conjuntos em T pertence a T
- a interseção de dois conjuntos quaisquer em T pertence a T

Os membros de T são chamados de **conjuntos abertos** e X junto com T ou seja o par (X,T) é chamado de **espaço topológico**.

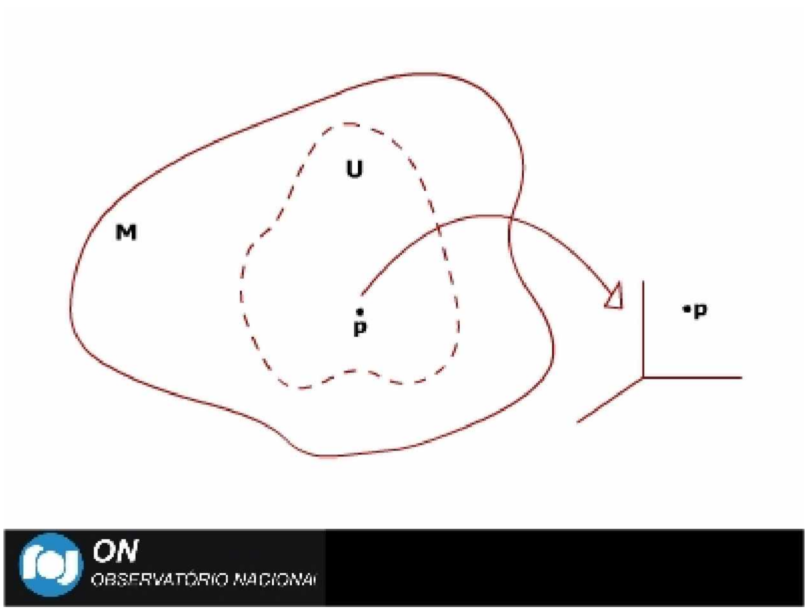
Variedade

Várias estruturas geométricas também estão presentes na física moderna. Uma das mais importantes é o conceito de variedade.

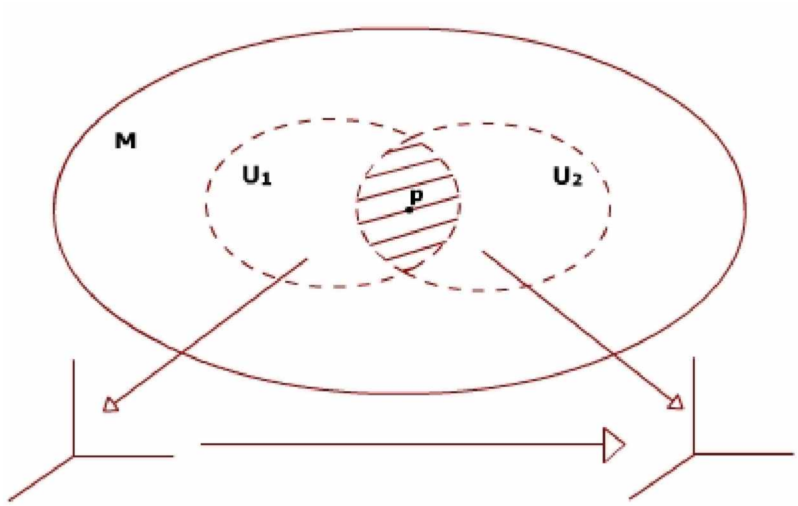
Podemos definir, de modo não muito preciso matemáticamente mas confortável, uma variedade (manifold) como um espaço matemático abstrato no qual cada ponto, que corresponde a uma posição única no espaço e no tempo, tem uma vizinhança que lembra o espaço Euclidiano embora sua estrutura global seja bem mais complicada do que este último.

As variedades podem ter qualquer número de dimensões. Por exemplo, como 1-variedade temos uma linha, um círculo, etc. O plano, a superfície de uma esfera, a superfície de um torus são exemplos de 2-variedade.

Em torno de cada ponto (evento) sobre essa variedade podemos definir cartas coordenadas para representar observadores em sistemas de referência. Se identificarmos um sistema de referência (observador) com uma dessas cartas coordenadas, qualquer observador pode descrever qualquer evento p. Um outro sistema de referência pode ser identificado com uma segunda carta coordenadas em torno de p. Os dois observadores, cada um deles em um sistema de referência, podem descrever o mesmo evento p mas obtém diferentes descrições.



Em geral precisamos de muitas cartas coordenadas que se superpõem para cobrir uma variedade. Dadas duas cartas coordenadas, uma contendo p (que representa um observador) e outra contendo q (que representa um outro observador) a interseção das duas cartas representa a região do espaço-tempo na qual ambos observadores podem medir quantidades físicas e então comparar os resultados. A relação entre os dois conjuntos de medições é dado por uma transformação de coordenadas não singular sobre estas interseção.



A idéia de cartas coordenadas como "observadores locais que podem realizar medições em sua vizinhança" também faz bom sentido físico pois isso é como realmente coletamos dados físicos localmente.

Cálculo Tensorial

Dois observadores situados em locais remotos do Sistema Solar podem observar um mesmo fenômeno que está ocorrendo. No entanto eles discordarão sobre tanto a localização exata como o momento exato em que esse fenômeno ocorreu. Isso ocorre porque eles terão diferentes coordenadas (t,x,y,z) uma vez que eles estão usando sistemas de coordenadas diferentes. Embora a descrição cinemáticas do mesmo evento seja feita de modo diferente pelos dois observadores, as leis dinâmicas, tais como, por exemplo, as leis de conservação e a primeira lei da termodinâmica, ainda ocorrerão. Entretanto, a teoria relativística da gravitação exige mais do que isso uma vez que ela estipula que tanto essas como todas as outras leis da física devem ter a mesma forma em todos os sistemas de coordenadas. Isso obriga os físicos relativístas a introduzirem na teoria relativística da gravitação uma nova forma matemática de expressar todas as grandezas físicas. A ferramenta matemática usada por Einstein para o desenvolvimento da sua teoria da gravitação foi o chamado "cálculo tensorial".

É quase impossível nos aprofundarmos um pouquinho mais na teoria relativística da gravitação sem que surjam tensores. Isso acaba se tornando uma barreira os que gostariam de saber um pouco mais sobre a teoria da gravitação de Einstein e se assustam com sua aparência complicada. Entretanto, podemos afirmar que isso é um enorme engano. Você usa tensores o dia todo, sem perceber! Os números que você usa no seu dia-a-dia, chamados mais tecnicamente de escalares, nada mais são do que tensores de ordem zero. Em várias áreas da física você já se deparou com quantidades que são definidas por uma grandeza numérica e por uma direção, a que damos o nome de vetores. As forças da natureza são representadas por vetores, os campos elétrico e magnético são vetores, o campo gravitacional é um vetor, etc. Os vetores nada mais são do que tensores de primeira ordem.

O que acontece é que quando trabalhamos com espaços que têm dimensão maior do que 3 os objetos geométricos ali definidos não têm nomes especiais e são chamados genericamente de tensores. Assim, o cálculo tensorial é o estudo das propriedades, operações e aplicações de tensores em espaços com qualquer dimensão.

A explicação acima nos indica que os tensores podem ser considerados como generalizações de vetores para espaços com dimensão superior a 3. Isso quer dizer que eles têm mais componentes do que as três que caracterizam os vetores.

Uma importante característica dos tensores é que a igualdade de dois tensores não depende do sistema de coordenadas. Se dois tensores são iguais em um sistema de coordenadas eles permanecerão iguais em qualquer outro sistema que se move, de qualquer maneira possível, em relação ao primeiro sistema.

Por conseguinte, se uma lei física é expressa como uma igualdade de dois tensores ela é independente do sistema de coordenadas.

A lei básica da relatividade geral é exatamente dessa forma. Ela é expressa pelas equações de campo de Einstein que relacionam a curvatura do espaço-tempo com a distribuição de matéria e energia.

O espaço-tempo é representado por um sistema de quatro coordenadas, uma das quais representa o tempo e três representam o espaço. A forma do espaço-tempo é determinada pelo chamado "tensor métrico". Se dois pontos vizinhos no espaço-tempo são descritos pelas coordenadas (x_0, x_1, x_2, x_3) e ($x_0 + dx_0$, $x_1 + dx_1$, $x_2 + dx_2$, $x_3 + dx_3$) a distância entre eles é chamada *ds* e é dada pela equação

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu$$

A expressão para o quadrado da distância elementar ds é chamada de "elemento de linha".

As quantidades $g_{\mu\nu}$ constituem o tensor métrico. Note que o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ definido em um espaço-tempo quadri-dimensional consiste de 16 componentes que são funções das quatro coordenadas x_0, x_1, x_2, x_3.

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}$$

ON OBSERVATÓRIO NACIONAL

Em geral todo espaço quadri-dimensional é caracterizado por um tensor de quarta ordem chamado tensor de Riemann $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ onde cada uma das letras α, β, γ e δ é apenas um índice que varia de 0 a 3. O espaço Euclidiano é aquele em que o tensor de Riemann é igual a zero. Por esse motivo o tensor de Riemann também é conhecido como tensor de curvatura. O tensor de Riemann também aparece na literatura com o nome de tensor de Riemann-Christoffel.

Dissemos acima que no espaço Euclidiano o tensor de Riemann é nulo. Podemos então concluir que sempre que o tensor de Riemann é nulo o espaço é Euclidiano? Não, isso não é correto. O espaço no qual tensor de Riemann-Christoffel é nulo é um espaço localmente euclidiano. A principal diferença entre um espaço Euclidiano e um espaço localmente euclidiano está relacionada com considerações topológicas e com a forma do espaço.

Para você saber se um espaço é curvo ou não, além do fato do tensor de curvatura ser nulo, você terá que verificar os chamados invariantes de curvatura do espaço.

Como o tensor de Riemann-Christoffel nos mostra a curvatura de uma superfície

Dissemos acima que o tensor de Riemann-Christoffel está associado à curvatura de uma geometria. É possível entender isso graficamente.

Quando Riemann deduziu a expressão matemática desse tensor ele usou o conceito de transporte paralelo de vetores. Vejamos o que isso significa.

Vamos supor que você está em uma superfície plana, um espaço Euclidiano, e traça um vetor perpendicular a essa superfície. Se você deslocar esse vetor mantendo-o sempre paralelo ao vetor inicial verá que ele se mantém perpendicular (ou seja, ortogonal) à superfície. Isso caracteriza uma superfície Euclidiana.

Vamos agora fazer o mesmo procedimento mas em uma superfície curva. Nesse caso vamos traçar dois vetores, ambos perpendiculares à superfície nos seus respectivos pontos de origem. Assim o vetor A é perpendicular à superfície e o vetor B também é perpendicular à superfície embora em pontos distintos. Vamos agora deslocar o vetor A mantendo-o sempre paralelo ao vetor original. A isso damos o nome de transporte paralelo ou deslocamento paralelo de um vetor. Vamos levar o vetor A até o ponto onde está o vetor B. Ao coincidirmos as origens dos dois vetores vemos que o vetor A não é mais ortogonal à superfície no ponto onde está o vetor B. Isso nos diz que o deslocamento paralelo de vetores é capaz de nos informar que uma superfície possui curvatura.