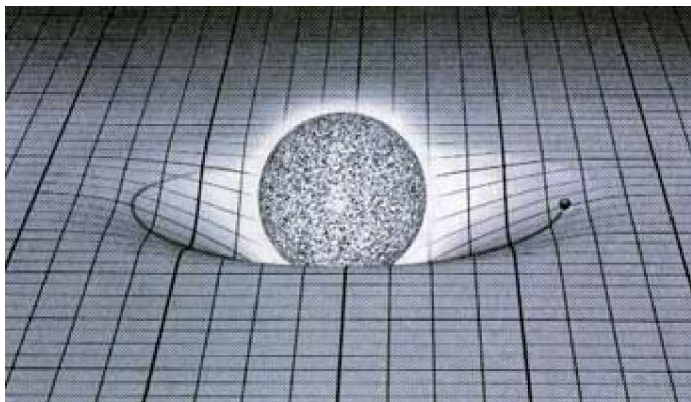


O conceito de espaço-tempo



Definimos espaço-tempo (sempre escrito dessa maneira, com as duas palavras ligadas por um hífen) como uma estrutura que combina as três dimensões do espaço com a dimensão única de tempo. Essa junção nos fornece uma descrição única para o espaço e tempo que identificamos com o nome de continuum do espaço-tempo. É bastante claro que a estrutura do espaço-tempo é quadri-dimensional.

O tratamento do espaço e tempo como sendo duas propriedades físicas que podem ser unificadas foi uma criação do físico Hermann Minkowski logo depois da teoria da relatividade restrita ter sido apresentada por Poincaré e Einstein em 1905. Minkowski apresentou esse novo e surpreendente conceito em um trabalho publicado em 1908 no qual ele ampliava o trabalho de Einstein sobre a teoria da relatividade restrita. Foi

Minkowski o primeiro a mostrar que o conceito de espaço e tempo como uma entidade única ou seja, espaço-tempo, permitia um melhor entendimento dos fenômenos relativísticos.

É importante notar que na teoria da relatividade restrita assim como na teoria da relatividade geral a descrição do espaço e do tempo por meio de uma única estrutura, o espaço-tempo, é absolutamente fundamental. Não é possível separar espaço e tempo quando analisamos fenômenos físicos nessas teorias, como fazíamos na teoria Galileana e Newtoniana, e um descuido pode nos levar a interpretações absolutamente erradas.

Poderíamos perguntar de que modo podemos unificar grandezas com propriedades tão distintas. Sabemos que tempo é medido em segundos, horas, etc enquanto que espaço ou seja, comprimento, é medido em metros, quilômetros, etc. Como fazer essa união matematicamente? Isso é feito multiplicando-se o termo associado ao tempo pela velocidade da luz, o que dá uma medida de espaço uma vez que $\text{espaço} = \text{velocidade} \times \text{tempo}$.

Para a física, o espaço-tempo é a arena onde todos os eventos físicos acontecem. No entanto, cabe ressaltar que existem vários tipos de espaços-tempo e fenômenos diferentes podem ocorrer em diferentes espaços-tempo.

Tanto a teoria da relatividade restrita como a teoria da relatividade geral trabalham com um espaço-tempo que possui quatro dimensões, três espaciais e uma temporal. Por que é assim e não, por exemplo, duas dimensões espaciais e duas temporais? Ocorre que a nossa percepção exige que tenhamos três dimensões espaciais para descrever a posição de um corpo no espaço. O tipo de coordenadas usadas não importa, elas podem ser cartesianas, esféricas, cilíndricas, ou qualquer outra, mas o número mínimo de dimensões espaciais é sempre três. Quanto ao fato de considerarmos apenas uma dimensão temporal isso também se deve ao fato de que para descrevermos as equações da dinâmica ou seja, da evolução temporal dos sistemas físicos, precisamos de um único tempo. Não há qualquer processo físico que exija a definição de uma outra variável semelhante ao tempo para que possamos descrever a evolução de um sistema qualquer.

Cabe aqui ressaltar que o problema do número *verdadeiro* de dimensões no nosso Universo ainda é um assunto sob discussão. Existem teorias que nos falam de cinco dimensões (teorias de Kaluza-Klein), assim como teorias que nos falam de até mesmo 26 dimensões. No entanto, em todas essas teorias o número de dimensões superiores a quatro estão "enroladas" de tal modo que não as percebemos. Essas dimensões extras pertencem apenas às estruturas subatômicas existente mas são muito importantes quando tratamos dos estágios iniciais do Universo (veremos esse assunto mais tarde).

A confusão sobre a "quarta dimensão"

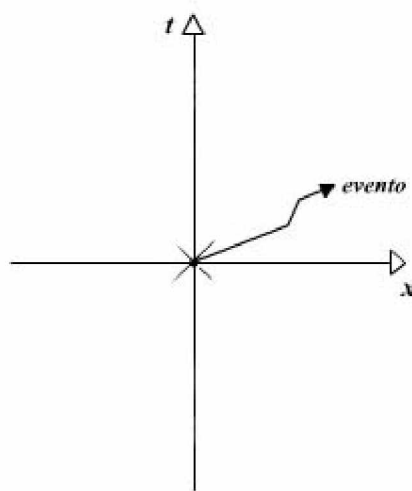
É claro que um conceito tão revolucionário como a introdução de quatro dimensões para descrever os fenômenos físicos relativísticos logo despertou a curiosidade do mundo científico e dos místicos de plantão. Como sempre acontece, algumas pessoas, embora sem entender possivelmente uma única linha dos trabalhos de Einstein e das propostas de Minkowski sobre um assunto tão técnico, imediatamente se adiantaram e passaram a "explicar" os chamados "fenômenos sobrenaturais" usando o conceito de "quarta dimensão". Era fácil justificar "fantasmas" ou qualquer outra coisa do gênero alegando que estes pertenciam a uma quarta dimensão e que a teoria da relatividade nada mais era do que a comprovação matemática de que esses fenômenos realmente existiam. O termo "quarta dimensão" foi introduzido pelo escritor inglês de ficção científica H. G. Well em 1895 na sua novela "A Máquina do Tempo".

Sem querer entrar no mérito da existência ou não de fantasmas, almas do outro mundo, mula sem cabeça, ou qualquer outra coisa, é bom ficar bem claro que a formulação da teoria da relatividade, restrita ou geral, em quatro dimensões é apenas um belíssimo artifício matemático usado para melhor explicar fenômenos relativísticos. Talvez você não saiba mas outras teorias físicas descrevem seus fenômenos em espaços com mais de três dimensões. Por exemplo, a teoria que trata do movimento de fluidos, chamada teoria cinética dos gases, trabalha nos chamados espaços de fase que possuem seis dimensões. Como dito acima a teoria de Kaluza-Klein (que veremos em um próximo módulo) descreve o universo em cinco dimensões. As novas teorias de superstrings precisam de mais de 11 dimensões para descrever sua estrutura matemática. E nenhuma delas traz espíritos do outro mundo para o nosso. O que elas nos trazem é uma belíssima, mas muito difícil, matemática para a mesa de trabalho.

Para aqueles que acreditam nos chamados "fenômenos paranormais" certamente não será o estudo da teoria da relatividade que irá comprovar qualquer coisa nessa área. É melhor deixar a teoria relativística quieta no seu canto, tratando apenas dos fenômenos ou com velocidades próximas à da luz ou em espaços-tempo com curvatura, pois incomodá-la com assuntos não científicos certamente provocará a ira dos fantasmas de Einstein, Poincaré, Minkowski, etc. E esses fantasmas são muito poderosos!

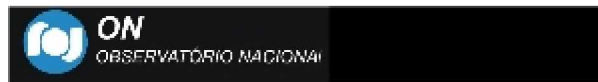
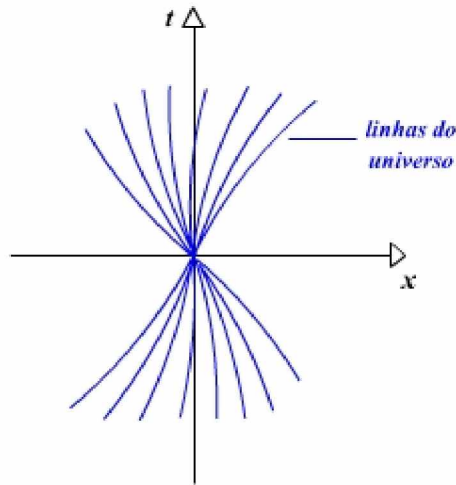
Os elementos básicos do espaço-tempo

Os elementos básicos do espaço-tempo são os eventos. Um evento é qualquer fenômeno que ocorre no espaço-tempo. Tanto o fato de você arranjar uma namorada (após tanto tempo de insistência!) ou uma estrela explodir em uma galáxia distante são tratados como simples eventos no espaço-tempo. Em qualquer dado espaço-tempo um evento ocorre em uma posição única e em um instante de tempo único.



Um evento marca um ponto no espaço-tempo. Se o processo físico descrito por esse evento evolui ao longo do tempo ele será representado sob a forma de uma linha no espaço-tempo onde cada um de seus pontos representa a evolução temporal do evento ou seja, uma seqüência de posições e instantes de tempo que mostram como uma dada situação física evoluiu. A essa linha damos o nome de linha do universo do

processo físico. Por exemplo, você está parado no ponto do ônibus (um evento), segundos depois você faz sinal para um ônibus (outro evento), você entra no ônibus (outro evento), o ônibus bate (outro evento), etc. Todos esses eventos formam uma única linha do universo que descreve a evolução temporal dessa parte do seu dia. Cada uma descreve uma linha de universo diferente.



Embora o espaço-tempo seja independente de cada observador para descrever um determinado fenômeno físico que ocorre em um dado instante de tempo e em uma dada região do espaço cada observador precisa escolher um sistema de coordenadas conveniente. Isso é bastante lógico pois cada evento é descrito por quatro coordenadas, três espaciais e uma temporal.

Para estudar as propriedades do espaço-tempo precisamos definir outras de suas propriedades. Para simplificar, vamos considerar em primeiro lugar uma geometria Euclidiana ou seja, um espaço-tempo plano.

Já vimos que um espaço-tempo plano é descrito pelo elemento de linha de Minkowski. Vamos analisá-lo pois a partir dele podemos obter informações muito importantes que podem ser generalizadas para qualquer espaço-tempo.

A métrica, ou elemento de linha, do espaço-tempo de Minkowski é escrita como

$$ds^2 = dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2$$

Nesse elemento de linha sabemos que dx_0 representa o produto cdt assim como $dx_1 = dx$, $dx_2 = dy$ e $dx_3 = dz$. Daí podemos escrever o elemento de linha de Minkowski como

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Vamos considerar inicialmente o caso em que $c^2dt^2 > (dx^2 + dy^2 + dz^2)$. Isso significa que ds^2 vai ter um valor positivo ou seja $ds^2 > 0$. Como a parte que envolve tempo, que chamaremos aqui de "parte temporal", é maior do que a "parte espacial" dizemos que o elemento de linha é do tipo-tempo.

Vimos anteriormente que, num espaço tri-dimensional ($dx^2 + dy^2 + dz^2$) corresponde ao comprimento de um vetor x qualquer. Podemos então escrever que $c^2dt^2 > dx^2$, onde dx^2 representa $dx^2 + dy^2 + dz^2$. Consequentemente $c > dx/dt$. Como dx/dt nos diz de que modo a coordenada espacial varia no tempo isso representa velocidade (lembre que espaço = velocidade x tempo e então espaço/tempo = velocidade). Daí, para um intervalo tipo-tempo, $c > v$. Esse importante resultado nos diz que a região do espaço-tempo onde o elemento de linha é tipo-tempo a velocidade da luz, c , é maior do que a qualquer outro objeto físico.

Considere agora o caso em que $c^2dt^2 < (dx^2 + dy^2 + dz^2)$. Isso significa que ds^2 vai ter um valor negativo ou seja $ds^2 < 0$. Como a parte que envolve coordenadas espaciais, a "parte espacial", é maior do que a "parte

temporal" dizemos que o elemento de linha é do tipo-espaço.

Considerando o que foi dito no caso anterior, temos que $c^2 dt^2 < dx^2$. Consequentemente $c < dx/dt$. Dai, para um intervalo tipo-espaço, $c < v$. Esse importante resultado nos diz que a região do espaço-tempo onde o elemento de linha é tipo-espaço a velocidade da luz, c , é menor do que a qualquer outro corpo material. Isso viola um dos princípios da teoria da relatividade espacial.

Finalmente vamos considerar o caso em que $c^2 dt^2 = (dx^2 + dy^2 + dz^2)$. Isso significa que ds^2 vai ter um valor igual a zero ou seja $ds^2 = 0$. Nesse caso $c^2 dt^2 = dx^2$ e então $c = dx/dt$. Como consequência $c = v$ e isso nos diz que essa situação representa todos os corpos que se movem com a velocidade da luz. A esse tipo de intervalo damos o nome de tipo-luz ou nulo.

Vemos, portanto, que o espaço-tempo possui três regiões com características bem distintas. Seria possível mostrar isso em um diagrama?

O espaço-tempo possui quatro dimensões. Sabemos que é impossível traçar uma figura com quatro dimensões. O que fazer? Se queremos representar o elemento de linha de Minkowski graficamente precisamos reduzir o problema de modo a obter uma figura em três dimensões. Para isso consideraremos apenas duas dimensões espaciais e a dimensão temporal, uma vez que queremos ver a evolução dos fenômenos físicos. A métrica de Minkowski é então escrita como

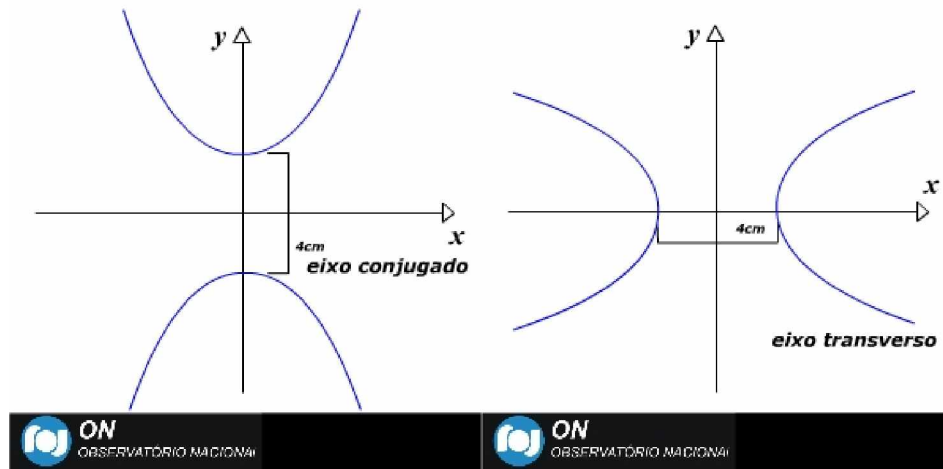
$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2$$

Para continuarmos é preciso lembrar um pouco de geometria. Essa parte da matemática nos diz que a forma geral da equação de uma hipérbole é

$$Ax^2 + By^2 = C$$

onde A e B diferem em sinal.

Duas hipérboles são conjugadas quando os eixos transverso e conjugado de uma são, respectivamente, os eixos conjugado e transverso da outra. Para obtê-las basta trocar os sinais dos coeficientes de x^2 e y^2 na equação geral da hipérbole mostrada acima.



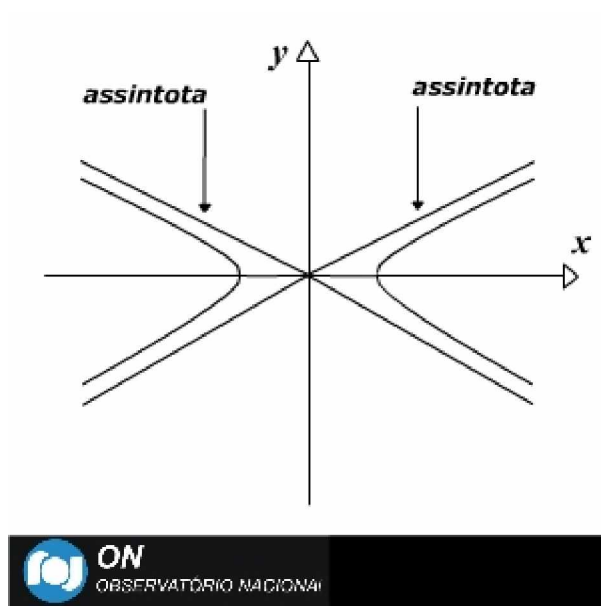
Sempre que, numa das formas típicas da equação de uma hipérbole substituirmos o termo constante por zero a nova equação nos mostrará que a figura vai se reduzir a um par de retas. Essas retas são chamadas de assíntotas da hipérbole. Assim, as assíntotas da hipérbole

$$bx - ay = ab$$

são as retas $bx - ay = 0$, ou seja

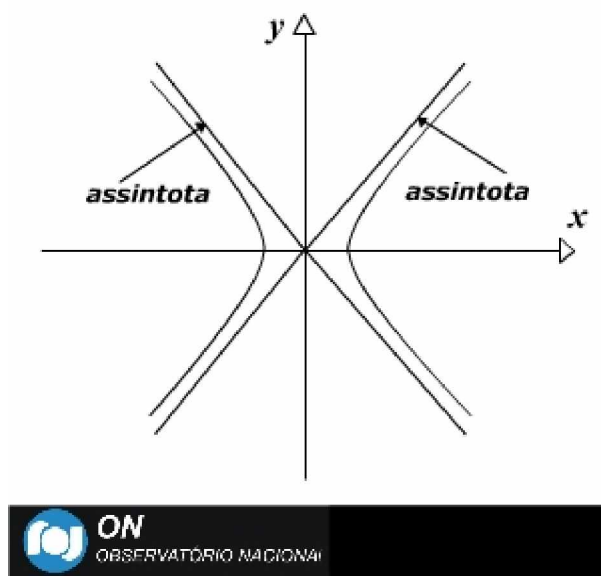
$$\begin{aligned} bx + ay &= 0 \\ bx - ay &= 0 \end{aligned}$$

duas retas que passam pela origem e formam os ângulos b/a e $-b/a$ com o eixo dos x .



Uma das propriedades das hipérboles é que seus ramos se aproximam indefinidamente de suas assíntotas enquanto que o ponto que descreve a curva se afasta para o infinito. Além disso duas hipérboles conjugadas têm as mesmas assíntotas como vemos na figura acima.

Uma outra propriedade é que quando os eixos de uma hipérbole são iguais ou seja, $a = b$, diz-se que a hipérbole é equilátera. Nesse caso suas assíntotas são retas perpendiculares.



Certamente você já notou que o gráfico da hipérbole discutido acima está situado no plano ou seja, é bidimensional. Se pensarmos na métrica de Minkowski dada em apenas duas dimensões ou seja

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2$$

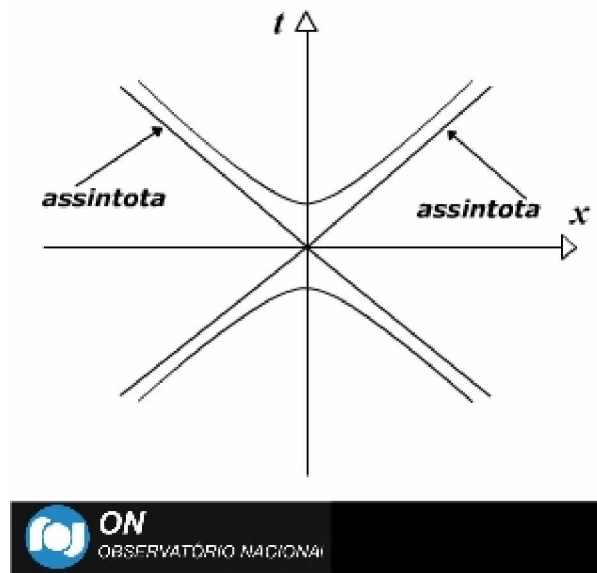
imediatamente identificamos essa equação com a de uma hipérbole. Fazendo $c = 1$ isso fica ainda mais claro

$$ds^2 = dt^2 - dx^2$$

Essa é a equação de uma hipérbole plana equilátera (uma vez que $a = b$). Suas assíntotas são duas retas perpendiculares dadas por

$$\begin{aligned} dt - dx &= 0 \\ dt + dx &= 0 \end{aligned}$$

Como representamos isso no plano? A figura abaixo nos mostra:



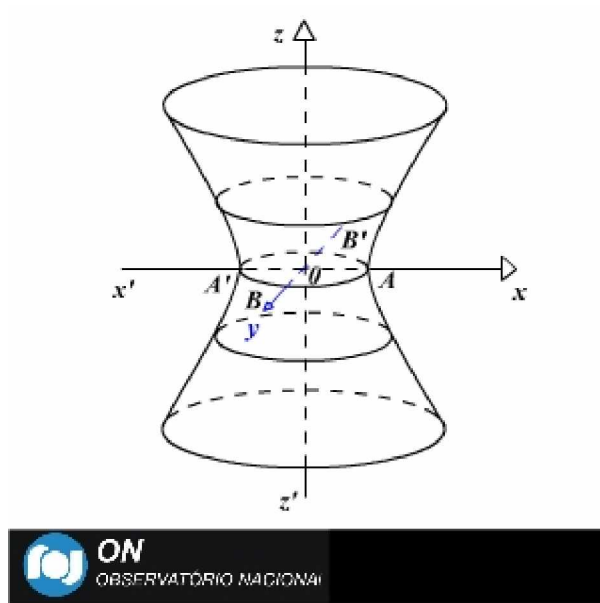
Esse é o diagrama do espaço-tempo da métrica de Minkowski que estudaremos a seguir. Note que os eixos coordenados agora representam uma coordenada espacial e uma temporal.

O leitor atento está desconfiado com essa dedução: o espaço-tempo é quadridimensional; alegando não poder fazer uma figura em quatro dimensões as reduzimos a duas coordenadas espaciais e uma temporal e agora mostramos o diagrama usando apenas duas dimensões, uma espacial e uma temporal!

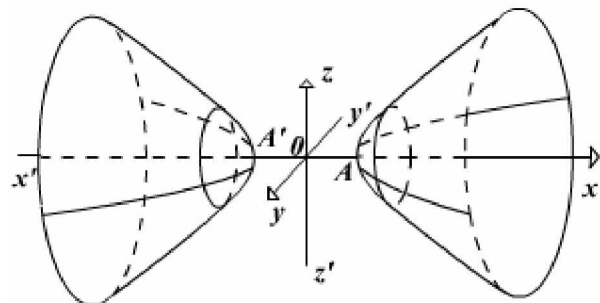
A justificativa é muito simples. Obtivemos o diagrama em apenas duas dimensões por que ele fica muito mais simples de ser visualizado. No entanto, podemos girar esta hipérbole em torno do eixo temporal e vamos obter dois cones com um vértice comum. A esse conjunto de cones damos o nome de cone de luz. Claro que você está perguntando se tudo isso pode ser demonstrado em três dimensões. É claro que sim. Existe uma parte da geometria que estuda as chamadas superfícies quádricas que possuem três dimensões. Entre elas temos as chamadas quádricas centradas cuja equação geral é do tipo:

$$\pm x^2/a^2 \pm y^2/b^2 \pm z^2/c^2 = 1$$

onde a , b e c são constantes. Quando dois sinais dessa equação são positivos e um deles é negativo a figura é chamada de hiperbolóide de uma folha.

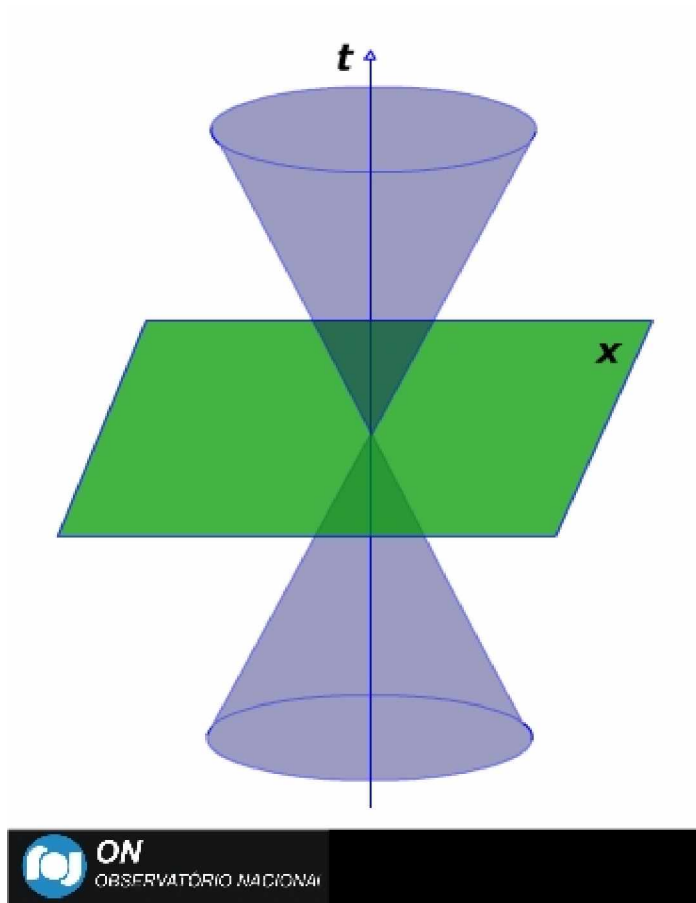


Quando apenas um dos sinais é positivo a figura é um hiperbolóide de duas folhas.

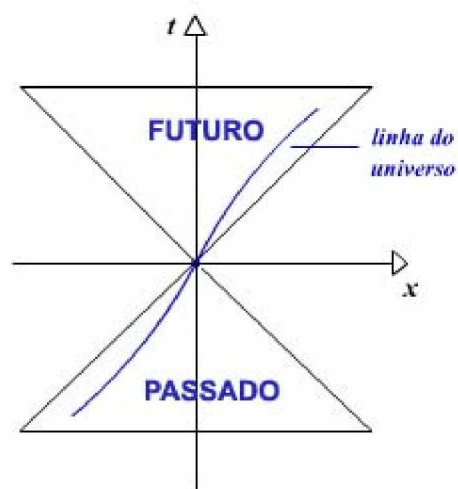


Tudo isso poderia ser demonstrado por meio de hiperbolóides mas não seria tão simples. Fazer a dedução acima em duas dimensões e pensar na rotação da figura em torno de um eixo vertical é muito mais acessível.

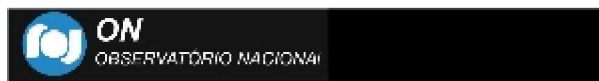
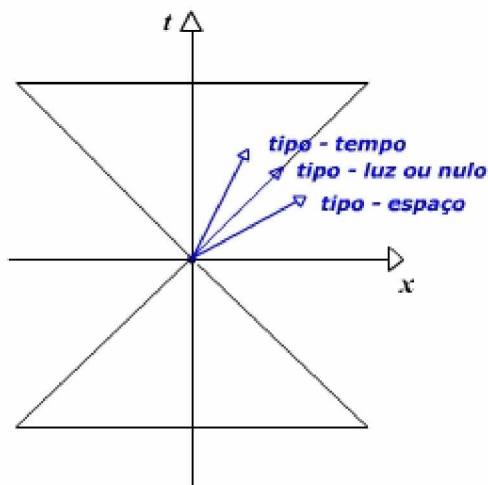
Generalizando para 4 dimensões dizemos que $ds^2 = 0$ gera um cone no hiperespaço ou seja, um hipercone. Se a dimensão z é suprimida, por exemplo, (e passamos o estudo para três dimensões) este hipercone será apenas um cone de revolução em torno do eixo t . A esse cone damos o nome de cone de luz.



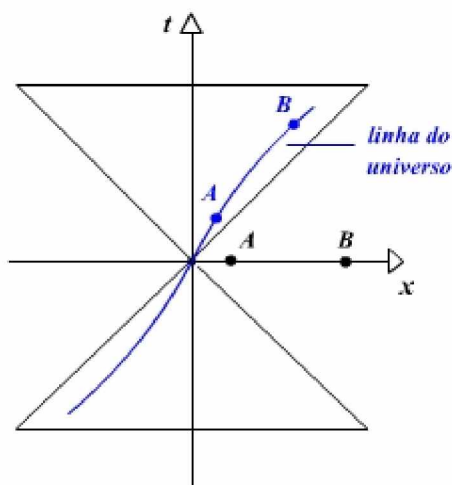
Cada evento define um cone de luz no espaço-tempo. A parte superior desse cone de luz, que representa o crescimento da coordenada temporal t , está representando o futuro desse evento. A parte de baixo do cone de luz, que nos mostra os valores da coordenada t que antecederam à posição e instante atual do evento considerado, representam o passado. A linha de universo desse evento, ou seja a evolução dinâmica que ele tem, ficará sempre contida no interior desse cone indo do passado para o futuro.



Vemos também que o cone de luz divide em duas regiões a vizinhança infinitesimal do espaço tempo em torno de um ponto O de coordenadas $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $t = 0$. A parte interior do cone contém linhas que passam por O e são chamadas de linhas tipo-tempo. A região exterior do cone contém linhas tipo-espaço. As linhas que passam pelo ponto O e estão localizadas sobre o hipercone têm $ds^2 = 0$ e correspondem a pontos que se movem com a velocidade da luz tais como os fótons. Essas são as linhas nulas.



Um ponto importante na análise dos cones de luz diz respeito à questão da causalidade. Sabemos que todo efeito tem uma causa e isso possui uma estrutura temporal que exige que a causa anteceda ao efeito. Você não pode ganhar na loteria e depois então jogar. O princípio da causalidade exige que a causa (jogar) seja realizada antes do efeito (ganhar). Dizemos então que os eventos causalmente relacionados estão dentro do cone de luz na região do futuro. Isso nos diz que um evento para ocorrer na natureza precisa ser tipo-tempo. Dito de outra forma, pontos cuja separação é tipo-tempo estão em comunicação. Os eventos A e B que estão sobre a linha de universo azul da figura estão causalmente relacionados: veja que o evento A ocorre antes do evento B.



Isso não acontece para pontos que são tipo-espaço. Nesse caso o princípio da causalidade é rompido: na região tipo-espaço você pode encontrar dois fenômenos (causa e efeito) ocorrendo no mesmo instante de tempo t , como mostra a figura acima. Nela os pontos A e B, situados sobre o eixo X, ocorrem no mesmo instante de tempo pois sua coordenada t é a mesma. Isso quer dizer as informações emitidas por A, por exemplo, atingem B instantaneamente violando o princípio relativístico de que a maior velocidade em que uma informação pode ser transportada é a velocidade da luz. Dizemos então que se dois pontos x e y são separados por um intervalo tipo-espaço nada que acontece em x pode ter qualquer influência causal direta sobre o que acontece em y .

Um outro ponto muito importante é aquele que diz respeito à classificação de geodésicas. Dizemos que uma geodésica é tipo-tempo, nula, ou tipo-espaço se o vetor tangente a ela em algum ponto é classificado dessa maneira. Isso é muito importante pois as trajetórias das partículas materiais, assim como do fóton, no espaço-tempo sempre são representadas por geodésicas. As partículas materiais são representadas por geodésicas tipo-tempo enquanto que os fótons são representados por geodésicas nulas (ou tipo-luz).

Na teoria relativística da gravitação sempre procuramos estudar o continuum do espaço-tempo que possui alguma forma de simetria. A razão para isso é o fato de que as matemática envolvida nesse estudo é muito complexa e difícil de tratar, exceto quando essas simetrias aparecem. É por essa razão que comumente vemos a consideração de espaço-tempo com simetria axial (um cilindro por exemplo) e simetria esférica (uma esfera), bem mais fáceis de lidar do que espaços-tempo sem simetria.

Outros tipos de espaços-tempo comumente considerados, pela simplificação que introduzem nos problemas, são os espaço-tempo estáticos e estacionários.

No espaço-tempo estático as componentes do tensor métrico $g_{\mu\nu}$ podem ser escolhidas de modo a nenhuma delas depender do tempo e ter iguais a zero as componentes que envolvem as coordenada tempo e espaço misturadas ($g_{0i} = 0$, onde "o" equivale a t e "i" equivale a x , y ou z por exemplo, em coordenadas cartesianas). Em um espaço-tempo estacionário esses termos não são, em geral, iguais a zero. Todo espaço-tempo estático é estacionário mas o inverso não é verdade.

Por que o espaço-tempo possui essas características?

Uma questão que sempre surge é porque o espaço-tempo teria as características que descrevemos : três dimensões espaciais bidirecionais e uma dimensão temporal unidirecional. Por que não poderia ser "um pouco diferente disso"?

Falamos muito ligeiramente sobre isso anteriormente mas vamos discutir esses pontos com um pouco mais de detalhes agora.

A resposta mais simples a essas questões seria declarar que isso aconteceu por acaso ou que isso é uma pergunta que não tem significado nem físico nem matemático. Ocorre que alguns cientistas se preocuparam em analisar com detalhes essas difícilimas questões e chegaram à conclusão de que, ao contrário do que afirmamos acima, nenhuma das duas sugestões de respostas está correta. Eles mostraram que todos os outros possíveis números de dimensões tanto temporais como espaciais conduzem a uma ou mais das seguintes situações problemáticas:

- o passado não determina o futuro. Isso quer dizer que as leis da física são impossíveis e os fenômenos naturais imprevisíveis. Isso ocorre em todos os casos onde tanto o número de dimensões espaciais como de temporais é superior a dois.
- a gravitação não produz órbitas estáveis e o eletromagnetismo não produz átomos e moléculas estáveis. Os prótons e os elétrons têm meias-vidas curtas.
- dos nove casos possíveis com não mais do que duas dimensões espaciais e duas temporais, os três casos que são estáveis e previsíveis não permitem a existência de matéria com qualquer complexidade tais como seres vivos com sistema nervoso.
- com duas excessões, todos os casos com mais de uma dimensão temporal são instáveis ou imprevisíveis. Uma excessão não permite complexidade. A outra excessão, o caso de três dimensões temporais e uma dimensão espacial, exige que toda a matéria tenha uma velocidade que excede a velocidade da luz no vácuo.

Parece que complexidade, vida e processamento de informação somente são possíveis em um universo sujeito ao espaço-tempo que definimos ou seja, com três dimensões espaciais e uma dimensão temporal. Esse fato é um exemplo de raciocínio antrópico. Teorias que propõem que o universo tem mais de três dimensões espaciais, tais como a teoria de Kaluza-Klein ou a teoria de cordas, não aniquilam o estado privilegiado do espaço-tempo, porque as dimensões espaciais acima de três somente importam para comprimentos da ordem do diâmetro de partículas subatômicas.

Immanuel Kant imaginou que o espaço tem três dimensões porque a lei da gravitação universal entre dois objetos é proporcional ao inverso do quadrado da distância que os separa. O argumento de Kant é historicamente importante mas põe o carro na frente dos bois. A lei da gravitação resulta da dimensionalidade do espaço. De modo mais geral, em um espaço com N dimensões, a intensidade da atração gravitacional entre dois corpos separados por uma distância d é proporcional a d^{N-1} .

Paul Ehrenfest mostrou em 1917 (*Annalen der Physik*, 61, 440) que se o número de dimensões espaciais é superior a três, a órbita de um planeta qualquer em torno de sua estrela não pode permanecer estável. O mesmo ocorre para a órbita da estrela em torno do centro da galáxia à qual a estrela pertence. Do mesmo modo elétrons não podem ter órbitas estáveis em torno de um núcleo: eles ou caem na direção do núcleo ou se dispersam. Ehrenfest também notou que se o espaço tem um número par de dimensões então as partes diferentes de um impulso de onda se deslocarão a velocidades diferentes. Se o número de dimensões é ímpar e maior do que três, os impulsos de onda se tornarão destorcidos. Somente com três dimensões ambos os problemas são evitados.

Tegmark em 1977 (*Classical and Quantum Gravity*, 14, L69-L75) fez o seguinte argumento antrópico. Se o número de dimensões temporais diferísse de 1, o comportamento dos sistemas físicos não poderia ser previsto com confiança a partir do conhecimento das equações diferenciais parciais relevantes. Em tal universo vida inteligente capaz de manipular tecnologia não poderia surgir. Se o espaço tivesse mais do que três dimensões, os átomos tais como nós os conhecemos (e, provavelmente, também estruturas mais complexas) não poderiam existir. Se o espaço tivesse menos do que três dimensões a gravitação de qualquer tipo se tornaria problemática e o universo seria simples demais para conter observadores.

Um outro ponto importante é o fato de que existem afirmações geométricas cuja verdade ou falsidade é conhecida para qualquer número de dimensões espaciais exceto três. Curiosamente o espaço tri-dimensional parece ser o mais rico matematicamente.

Os leitores interessados em ler mais sobre esse assunto devem procurar os dois livros abaixo:

- John D. Barrow e Frank J. Tipler *The Anthropic Cosmological Principle* (1986)
- John D. Barrow *The Constants of Nature* (2002)